

INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS APLICADO AO ELETROMAGNETISMO PARA ESTUDANTES DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Duani Tedesco*
Kleyton Hoffmann**
Marconi Januário***

Resumo

Este artigo propõe a utilização do Método de Elementos Finitos (MEF), aplicado ao eletromagnetismo como ferramenta de ensino para estudantes de engenharia elétrica. Deparando-se com um mercado de trabalho exigente, o qual busca cada vez mais profissionais capacitados, percebe-se a necessidade de implementar nos cursos de Engenharia Elétrica a capacitação de acadêmicos em relação ao cálculo da distribuição de campos eletromagnéticos. Para isso, primeiramente, são reforçadas as noções básicas sobre o MEF e um programa que desenvolve o cálculo de campos é elaborado, o qual possibilita aos acadêmicos a visualização gráfica e numérica dos resultados. Por fim, os resultados são comparados com a solução obtida em um programa já consolidado na área.

Palavras-chave: Método de Elementos Finitos. Engenharia Elétrica. Campos eletromagnéticos.

1 INTRODUÇÃO

A utilização do Método de Elementos Finitos (MEF) é de grande importância na pesquisa e no desenvolvimento de produtos. O MEF tem aplicação ou é aplicado nas mais diversas áreas da engenharia (IDA; BASTOS, 1997). Com o método, pode-se, por exemplo, calcular a distribuição térmica em transformadores ou o conjugado em máquinas girantes sem a necessidade da construção de protótipos (BASTOS, 2012).

Segundo Veloso (2013), os centros de pesquisa e as indústrias carecem de mão de obra qualificada que saiba utilizar ferramentas de MEF. A realidade brasileira não foge a essa regra. Barrios (2007) afirma que, geralmente, os contratantes de mão de obra precisam capacitar profissionais para a utilização de ferramentas de MEF. Nas disciplinas de cursos de graduação, as universidades não costumam inserir conteúdos relacionados, não atendendo à demanda por profissionais capacitados.

Obizor e Sadiku (1993) afirmam que o MEF é amplamente utilizado como método numérico de resolução de equações diferenciais parciais lineares e não lineares. Dessa forma, esse artifício não deveria ser ensinado somente em níveis de pós-graduação para estudantes de Engenharia Elétrica. Os alunos devem ser iniciados nesse assunto o quanto antes para que possam ter esse diferencial em seus currículos. Com esse mesmo pensamento, Sadiku, Obizor e Makki (1991) afirmam que nem sempre os conceitos introdutórios e básicos são de simples assimilação, sendo interessante trazer esse conhecimento aos graduandos de forma prática e sucinta, para que possam conhecer e entender essa ferramenta durante a graduação.

O presente estudo tem a intenção de propor ao Curso de graduação em Engenharia Elétrica o MEF, inserindo na instituição um curso que apresente o programa, com noções de elementos finitos, com o intuito de resolver problemas eletromagnéticos estáticos. O artigo revisa alguns conceitos e o histórico de aplicação do MEF, mostrando,

* Graduando do Curso de Engenharia Elétrica na Universidade do Oeste de Santa Catarina; Bolsista do PIBIC/Unoesc; duanitedesco@hotmail.com

** Mestre em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Santa Catarina; Professor do Curso de Engenharia Elétrica na Universidade do Oeste de Santa Catarina; kleyton.hoffmann@unoesc.edu.br

*** Mestre em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Santa Catarina; Professor do Curso de Engenharia Elétrica na Universidade do Oeste de Santa Catarina; Marconi.januario@unoesc.edu.br

posteriormente, aspectos da implementação computacional, explicados com um algoritmo simplificado. São resolvidos dois problemas com o algoritmo proposto, um envolvendo a eletrostática e outro a magnetostática. Na parte final do artigo, os resultados numéricos e os gráficos são apresentados e a análise destes é feita com base na comparação com os resultados obtidos por outro programa.

2 HISTÓRICO E APLICAÇÃO.

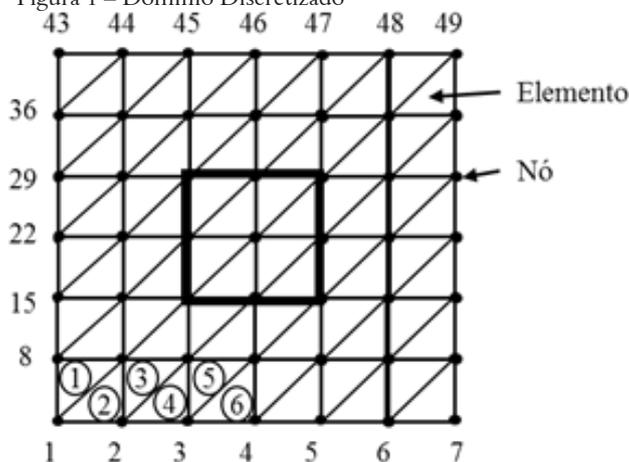
A distribuição de campos eletromagnéticos em qualquer dispositivo, bem como efeitos da física mecânica obedecem às equações diferenciais de segunda ordem. A resposta analítica para essas equações, muitas vezes, é de difícil obtenção. Dessa forma, engenheiros e projetistas utilizavam métodos empíricos para resolver boa parte dos problemas. No entanto, a partir de 1940 e, em particular, com o fim da Segunda Guerra Mundial, várias áreas, como a de criação de estruturas, aeronáutica, pesquisa espacial, etc. necessitavam de um método preciso (BASTOS, 2012).

Com o surgimento na década de 1950, na aeronáutica, esse método se difundiu, mas somente por volta de 1970 que o MEF passou a ser empregado ao eletromagnetismo de forma ampla (IDA; BASTOS, 1997). A evolução de dispositivos e do estudo de espraiamento de campos tomou impulso nos anos 1980. Atualmente, existe um grande número de programas que utilizam esse método de cálculo para resolução de problemas e criação de dispositivos; todos estão à disposição de engenheiros, projetistas e estudantes.

O método a ser apresentado aborda problemas estáticos. Os problemas decorrentes à variação de campo eletromagnético são comuns em diversos dispositivos, como é o caso de capacitores, indutores, ímãs, entre outros. O comportamento de dispositivos eletromagnéticos depende da distribuição dos campos em seu interior. Assim, por meio dos cálculos se pode obter os projetos finais sem a necessidade da construção de inúmeros protótipos (BASTOS, 2012).

3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO

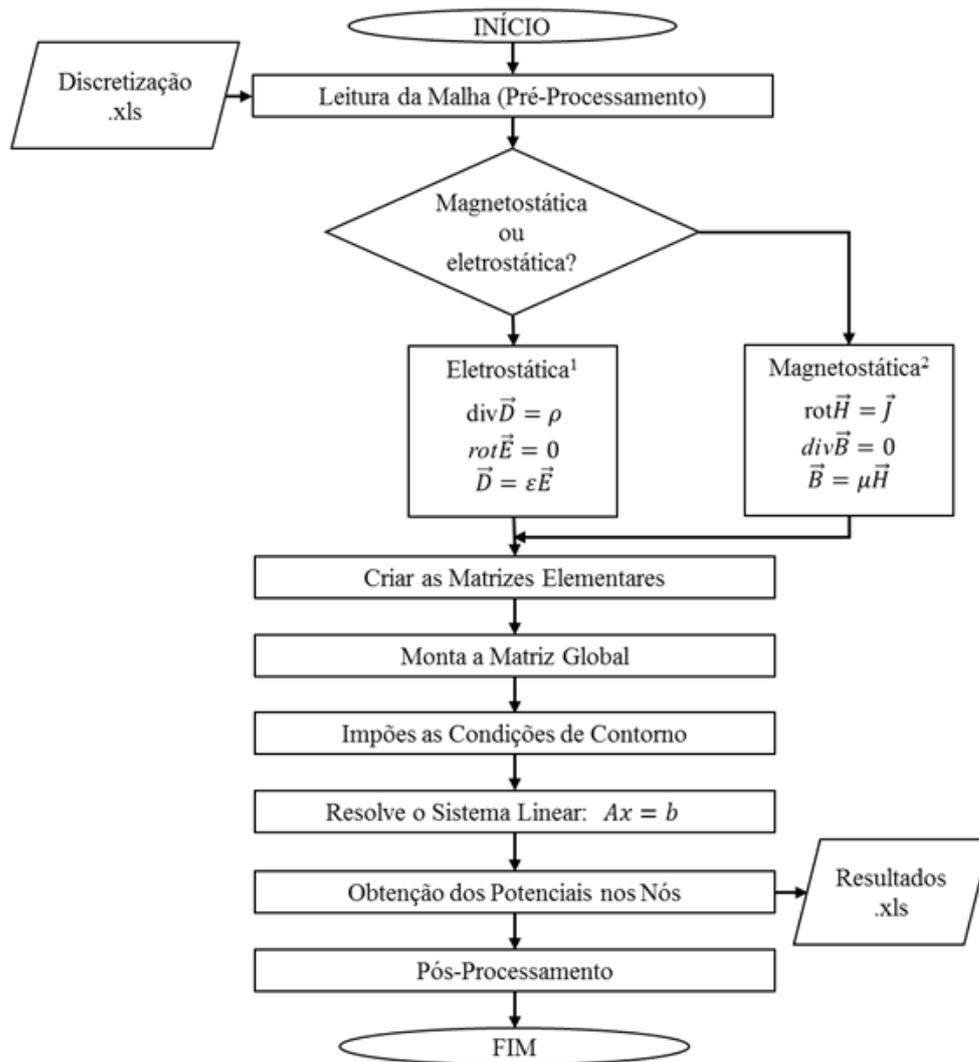
Figura 1 – Domínio Discretizado



Fonte: Bastos (2012).

O algoritmo utilizado foi proposto por Bastos (2012); os princípios básicos usados para a confecção do algoritmo de elementos finitos foram separados em algumas etapas. Pode-se destacar, entre estas, o armazenamento dos termos matriciais no sistema global, a inserção das condições de contorno e, por fim, a resolução desse sistema matricial. No Fluxograma 1 estão dispostas as etapas seguidas para programação. Inicialmente, o operador deve identificar o problema e determinar a área do dispositivo a ser estudado (domínio de estudo). Após essa etapa, divide-se ou discretiza-se o domínio em pequenos elementos triangulares mostrados na Figura 1.

Fluxograma 1 – Passos de processamento



Fonte: os autores.

O próximo passo trata-se da leitura dos dados da malha, na qual são estabelecidas as coordenadas dos nós, os nós de cada triângulo, o número de elementos e a carga ou corrente imposta (ρ ou \vec{J}). Então, são criadas as matrizes elementares para o posterior alocamento dos termos matriciais no sistema global. O sistema linear a ser resolvido é do tipo $Ax = b$, e sua resolução foi realizada invertendo a matriz A . A última etapa é a exportação dos resultados e a criação dos resultados gráficos.

3.1 O ALGORITMO

O algoritmo foi desenvolvido utilizando os programas Excel e Matlab. No Excel foram armazenados os dados da malha; nele, os usuários farão as modificações necessárias para que o algoritmo seja capaz de calcular qualquer tipo de estrutura em duas dimensões. Foram criadas três planilhas, as duas primeiras são responsáveis por receberem as variáveis. A primeira recebe os dados do programa destinado à resolução de problemas eletrostáticos, a segunda recebe os dados do programa para a resolução de problemas magnetostáticos e a terceira planilha fica destinada a receber os resultados. A resolução do MEF foi feita por meio do Matlab, nele foi escrito o algoritmo responsável pela resolução do método. O Matlab importa os dados já estabelecidos no Excel, conforme Fluxograma 1.

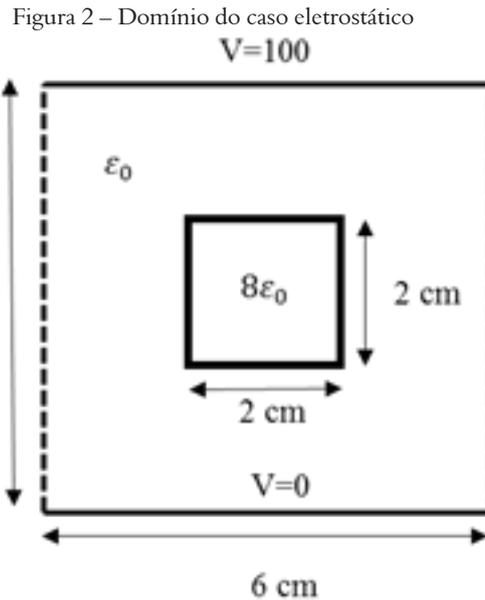
¹ D = Densidade de fluxo elétrico (C/m²); E = Intensidade de campo elétrico (V/m); ϵ = Permissividade elétrica (F/m);

² H = Intensidade de campo magnético (A/m); B = Densidade de campo magnético (T); μ = permeabilidade magnética (H/m).

3.2 PROBLEMA ELETROSTÁTICO E MAGNETOSTÁTICO

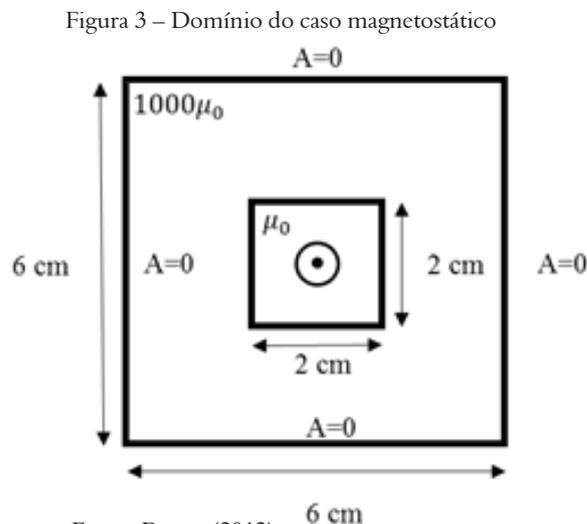
Foram realizados dois estudos de caso, um eletrostático e outro magnetostático, o primeiro a ser avaliado será o caso eletrostático. Na Figura 2, o domínio é formado por ar e sua permissividade é igual a do vácuo ($\epsilon_1 = \epsilon_0$), e um material dielétrico na sua parte central que possui sua permissividade oito vezes maior que a do vácuo ($\epsilon_2 = 8\epsilon_0$). Os potenciais são impostos nas linhas superiores e inferiores, 100V e 0V, respectivamente. Não são consideradas as cargas estáticas, assim, o campo elétrico é criado pela diferença de potencial entre as linhas superior e inferior (BASTOS, 2012).

O domínio da Figura 2 pode ser comparado a um capacitor de placas planas. Quando consideradas duas placas condutoras, paralelas, separadas por um dielétrico e com uma diferença de potencial entre elas, haverá um acúmulo de cargas positivas em uma das placas e de cargas negativas na outra.



Fonte: Bastos (2012).

No segundo estudo, relacionado ao caso magnetostático, é utilizado o potencial vetor magnético (IDA; BASTOS, 1997). A Figura 3, é semelhante ao exemplo eletrostático e de mesmas dimensões. Na parte central se encontra um condutor de cobre que possui permeabilidade igual a do vácuo ($\mu = \mu_0$). Na parte externa do condutor existe um material ferromagnético que possui permeabilidade mil vezes maior que a do vácuo ($\mu = 1000\mu_0$). A densidade de corrente que está sendo imposta é de 1 A/mm^2 .



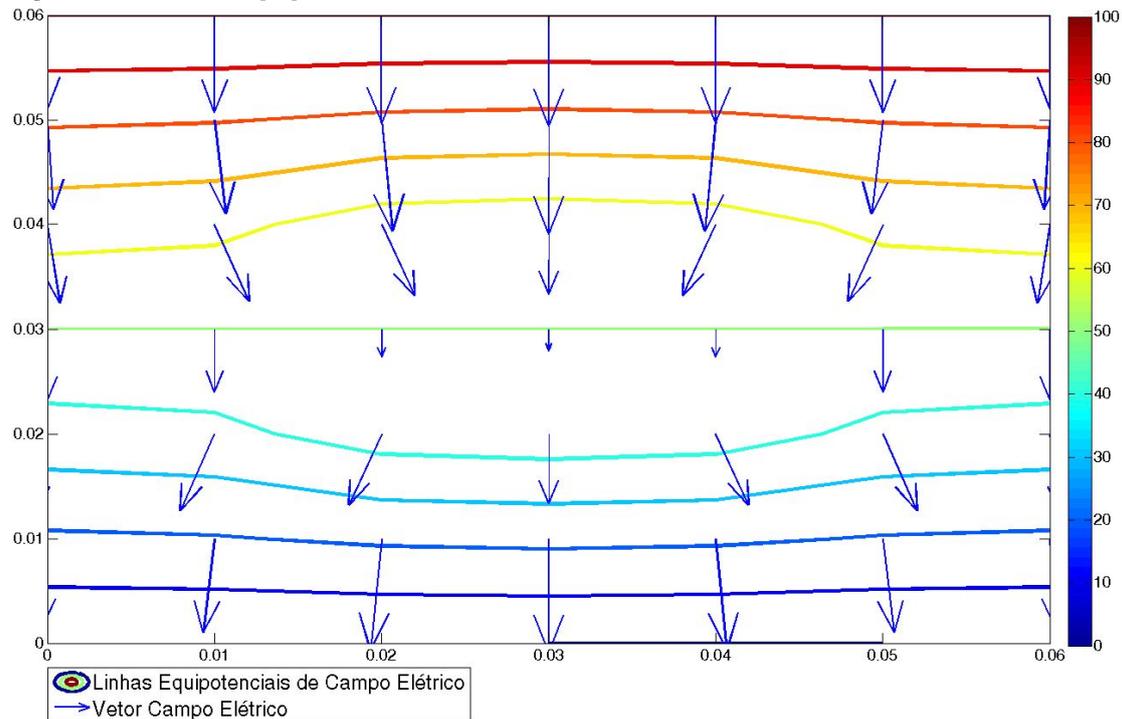
Fonte: Bastos (2012).

A discretização do domínio não é o objetivo desse trabalho, ela foi feita manualmente, para que sejam informadas as coordenadas de cada nó, o meio material e a carga de cada elemento triangular. Como os dois casos estudados possuem as mesmas proporções, eles foram discretizados da mesma forma, conforme a Figura 1.

4 RESULTADOS

Os resultados obtidos por intermédio do programa são expressos de forma numérica e gráfica, resultados numéricos são enviados do Matlab para o Excel. Na Figura 4 tem-se a intensidade e a direção dos campos elétricos para o caso eletrostático.

Figura 4 – Linhas de campo para o caso eletrostático

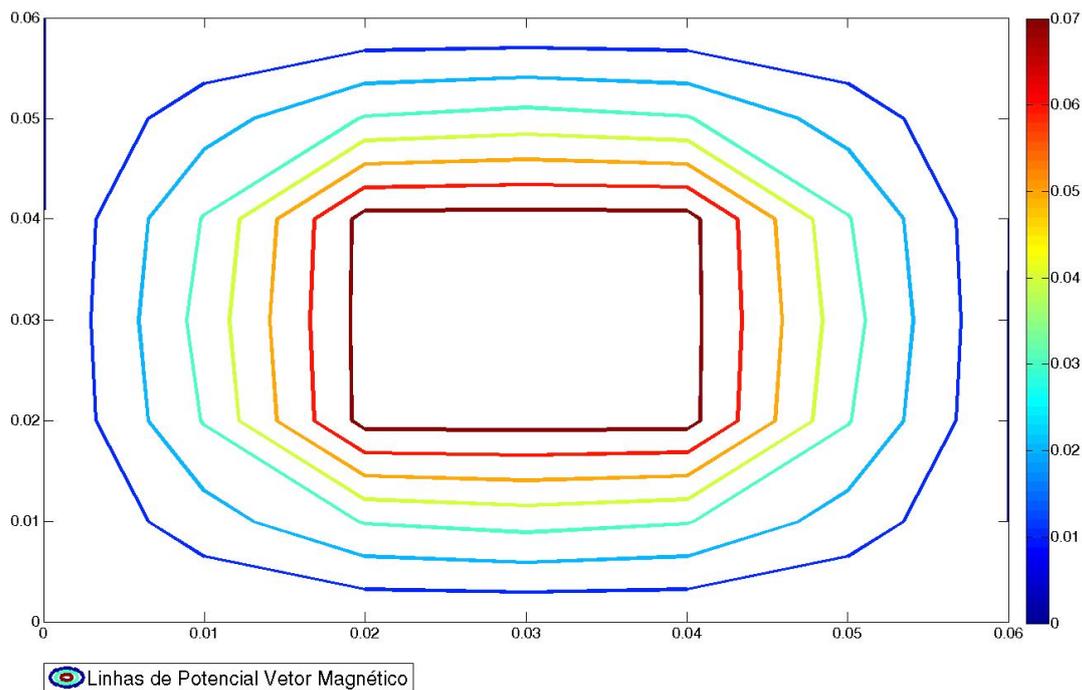


Fonte: os autores.

Na Figura 4 estão distribuídas as linhas equipotenciais de potencial elétrico e o vetor campo elétrico, que indica como o campo está distribuído no dispositivo. Esses dados mostram que as linhas equipotenciais apresentam certo desvio quando se aproximam do material com maior permissividade elétrica. Isso ocorre, pois os campos elétricos se formam com maior intensidade em meios de menos permissividade.

Como na linha superior foi imposto um potencial de 100 Volts (V), na linha inferior foi zerado o potencial para que fosse possível a criação do campo elétrico. Dessa forma, o vetor campo elétrico possui a direção de cima para baixo, respeitando a equação $\vec{E} = -\text{grad}V$ (SADIKU, 2012).

Figura 5 – Linhas de campo para o caso magnetostático



Fonte: os autores.

Na Figura 5, é mostrado o resultado obtido por meio do algoritmo criado para o caso magnetostático. Nesta estão distribuídas as linhas equipotenciais do potencial vetor magnético, que coincide com as linhas de indução magnética. O condutor localizado no centro desse dispositivo foi alimentado com uma densidade de corrente igual a 1 A/mm², criando um campo magnético, conforme é visualizado na Figura 5.

4.1 COMPARANDO OS RESULTADOS.

Com o intuito de examinar e confrontar os resultados com um programa já consolidado, foram comparados os resultados desse trabalho proposto com os obtidos por meio do programa EFCAD,* do Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos (Grucad) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). O EFCAD é um programa desenvolvido pelo Grucad para resolver equações parciais de segunda ordem em 2D, relacionadas a efeitos térmicos e magnéticos utilizando o MEF (GRUCAD, 2002).

A primeira comparação foi feita com os resultados obtidos numericamente do caso eletrostático. Foram coletados os dados de três nós e três elementos para confrontar com os resultados do EFCAD (Tabelas 1, 2, 3 e 4).

Tabela 1 – Comparação do potencial elétrico para o caso eletrostático

Número do nó	Eletrostática		Diferença módulo	Erro %
	Potencial elétrico (Programa)	Potencial elétrico (EFCAD)		
10	21,5	19,9	1,6	8,04
20	37,5	36,4	1,1	3,02
40	78,5	78,9	0,4	0,51

Fonte: os autores.

*O programa EFCAD está disponível em: <<http://www.grucad.ufsc.br/>>.

Tabela 2 – Comparação do módulo do campo elétrico para o caso eletrostático

Número elemento	Eletrostática		Diferença módulo	Erro %
	Módulo campo elétrico (Programa)	Módulo campo elétrico (EFCAD)		
10	2163,71	1956,92	206,79	10,57
20	2354,97	1867,81	487,16	26,08
40	1439,03	1958,12	519,09	26,46

Fonte: os autores.

As Tabelas 1 e 2 mostram o resultado da comparação para o caso eletrostático do potencial elétrico e do módulo do campo elétrico, respectivamente. A comparação é realizada por meio do módulo da diferença dos valores obtidos no programa proposto por este trabalho e do EFCAD, com o erro percentual da diferença em cada caso.

As Tabelas 3 e 4 mostram o resultado da comparação para o caso magnetostático do potencial vetor magnético e do módulo do campo magnético, respectivamente. A comparação é realizada por meio do módulo da diferença dos valores obtidos, com o erro percentual da diferença em cada caso.

Tabela 3 – Comparação do potencial vetor magnético para o caso magnetostático

Número do nó	Magnetostática		Diferença módulo	Erro %
	Potencial vetor magnético (Programa)	Potencial vetor magnético (EFCAD)		
10	0,030650008	0,0346	0,00395	11,42
20	0,030644038	0,0343	0,00366	10,66
40	0,030650008	0,0347	0,00405	11,67

Fonte: os autores.

Tabela 4 – Comparação do módulo do campo magnético para o caso magnetostático

Número elemento	Magnetostática		Diferença módulo	Erro %
	Módulo campo magnético (Programa)	Módulo campo magnético (EFCAD)		
10	3,43	3,46	0,03	0,87
20	3,98	3,44	0,54	15,70
40	4,29	3,3	0,99	30,00

Fonte: os autores.

5 CONCLUSÃO

Analisando os resultados, é possível notar que houve uma divergência nos potenciais calculados nos nós e nos campos, quando comparados aos resultados do EFCAD. Um dos motivos que podem justificar essa diferença, principalmente, no cálculo do módulo do campo é a discretização do domínio. O EFCAD possui um malhador que discretiza o material em elementos menores, com isso, o resultado é mais preciso, enquanto o programa desenvolvido é limitado nessa questão. Entretanto, como o programa proposto neste trabalho é de uso didático, e o interessante é a familiarização dos acadêmicos com o método, obtiveram resultados satisfatórios.

O estudo desenvolvido é a base para propiciar o início de um curso de extensão sobre o MEF. Além disso, para estudos futuros, pretende-se ampliar esse método, trabalhando também com casos dinâmicos, melhorando a forma de discretização adotada e analisando problemas mais próximos da realidade.

Introduction to the Finite Element Method (FEM) applied to electromagnetism to electrical engineering students

Abstract

This article proposes the use of Finite Element Method (FEM) applied to electromagnetism as a teaching tool for electrical engineering students. Dealing with a demanding job market, which seeks increasingly skilled professionals, we intend to implement in electrical engineering courses a lecture to train students in relation to the calculation of the distribution of electromagnetic fields. For this, the basic notions reinforced of the FEM are the students and a program that develops calculation of fields is prepared, it enables to show graphical and numerical results. Finally, the results are compared with the solution obtained in an established program in the area.

Keywords: Finite Element Method. Electrical Engineering. Electromagnetic Fields.

REFERÊNCIAS

BARRIOS, B. D. O Método dos Elementos Finitos Como Ferramenta Coadjuvante no Ensino da Disciplina de Resistência dos Materiais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 35., 2007, São Paulo. **Anais eletrônicos...** São Paulo, 2007. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2007/artigos/125-Daniel%20Ben%C3%ADtez%20Barrios.pdf>>. Acesso em: 15 jun. 2014.

BASTOS, J. P. A. **Eletromagnetismo para engenharia** – estática e quase estática. 3. ed. Florianópolis: UFSC, 2012. 396 p.

GRUPO DE CONCEPÇÃO E ANÁLISE DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS. **Manual do EFCAD**. Florianópolis: UFSC, 2002. Disponível em: <<http://www.grucad.ufsc.br/>>. Acesso em: 02 mar. 2015.

IDA, N.; BASTOS, J. P. A. **Electromagnetics and calculation of fields**. 2. ed. New York: Springer, 1997.

OBIOZOR, C. O.; SADIKU, M. N. O. **Finite elements in electromagnetics for undergraduate curriculum**. IEEE, 1993.

SADIKU, M. N. O.; OBIOZOR, C. O.; MAKKI, A. Z. **A further introduction to finite element analysis of electromagnetic problems**. IEEE, 1991.

SADIKU, M. N. O. **Elementos de eletromagnetismo**. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

VELOSO, C. H. L. Desenvolvimento de Uma Ferramenta de Ensino da Equação de Laplace Usando Uma Nova Abordagem do Método de Elementos Finitos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 41., 2013, Maranhão. **Anais eletrônicos...** Maranhão, 2013. Disponível em: <http://www.fadep.br/engenharia-eletrica/congresso/pdf/117634_1.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2014.